

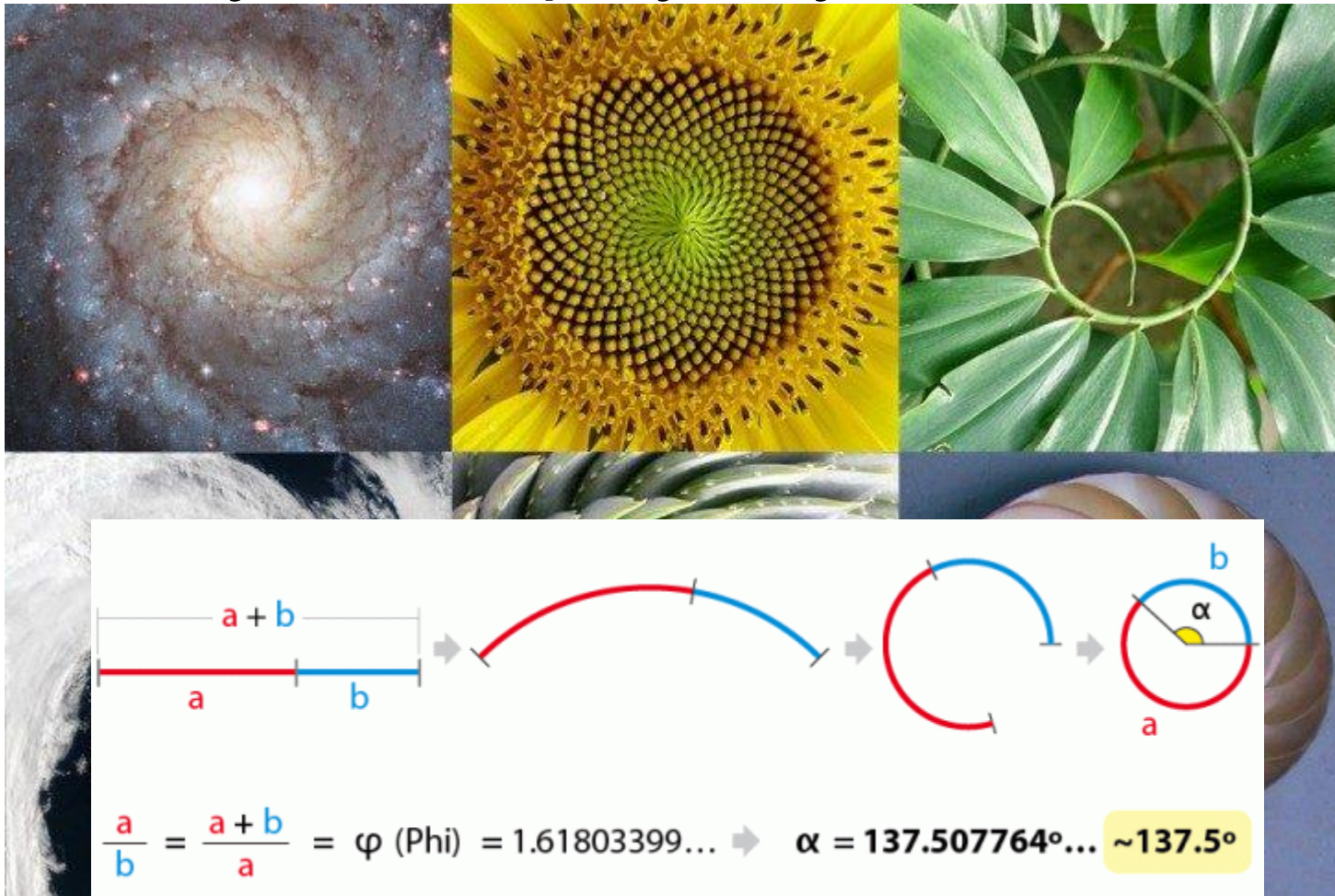


FIZYKA Z ELEMENTAMI FIZYKI RADIACYJNEJ I | WYKŁAD 2

**Matematyczność przyrody.
Elementy rachunku wektorowego,
różniczkowego i całkowego**

dr inż. Katarzyna Gwóźdź

Matematyczność przyrody



Matematyczność przyrody

Fizyka opisuje prawa
wszechświata

Matematyka jest językiem
tego opisu

Równania Maxwella

- Zapisane w 1865 r.
- Udowodnione w 1887 r. przez Hertza

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



Autorstwa digitized from an engraving by G. J. Stodart from a photograph by Fergus of Greenock - The Life of James Clerk Maxwell, by Lewis Campbell and William Garnett (see [1]), Domena publiczna, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=501204>

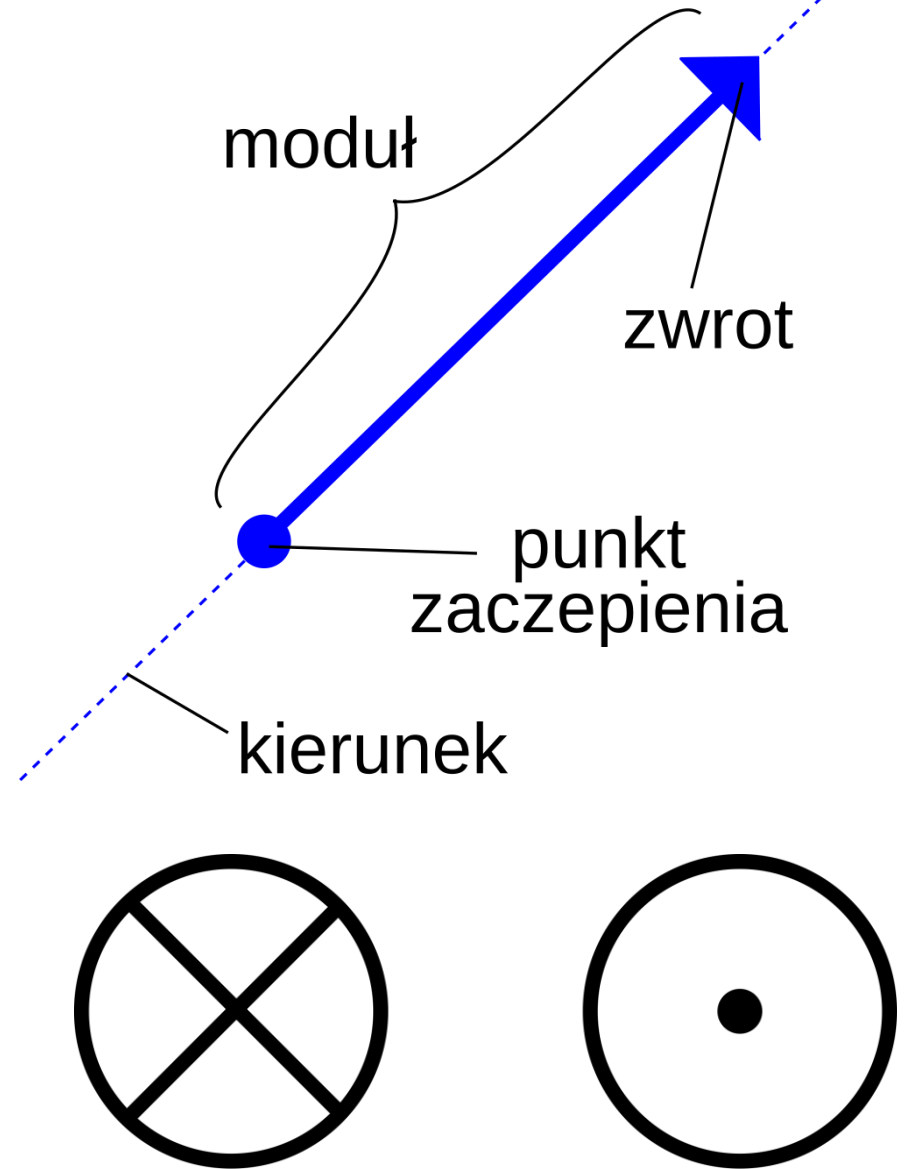
Skalar i wektor

Skalar

- Wielkość fizyczna opisywana wartością
 - Ma jednostkę
 - Masa, energia, temperatura...

Wektor

- Do opisu wielkości fizycznej potrzeba więcej niż tylko wartość
- Moduł ma jednostkę
- Siła, prędkość, pęd



Działania na skalarach

Zwykłe działania matematyczne. Uwaga na jednostki!

$$T_1 = 273 \text{ K}$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 196 \text{ K}$$

$$T_2 = 77 \text{ K}$$

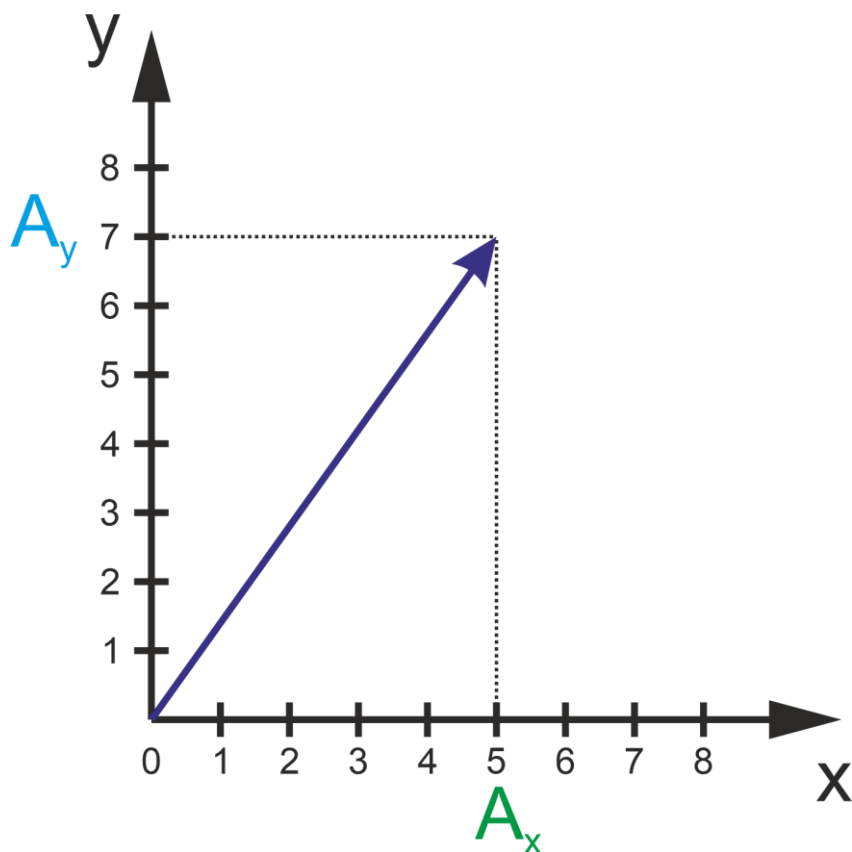
$$E_1 = 1 \text{ J} \quad E_2 = \frac{E_1}{10} = 0,1 \text{ J}$$

$$l_1 = 10 \text{ cm}$$

$$l = l_1 + l_2 = 10 \text{ cm} + 10 \text{ m} = 0,1 \text{ m} + 10 \text{ m} = 10,1 \text{ m}$$

$$l_2 = 10 \text{ m}$$

Wektory



W 2D:

$$\vec{A} = (A_x, A_y) = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

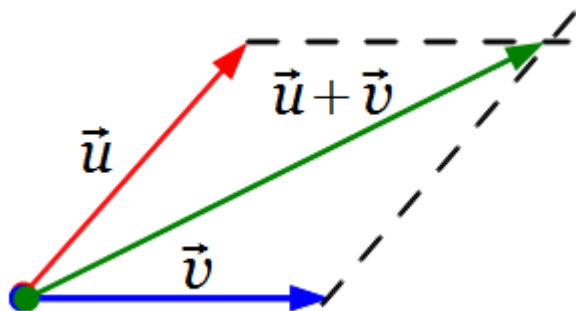
W 3D:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ - wektory jednostkowe
wzdłuż osi x, y i z

Działania na wektorach - dodawanie



https://www.matmana6.pl/zdjecia/szkola_srednia/geometria_analityczna/wektory_definicja_i_dzialania_na_wektorach_28.png

$$\vec{u} = (u_x, u_y)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Działania na wektorach - odejmowanie



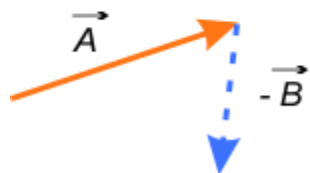
Krok 1

$$\vec{A} = (A_x, A_y)$$

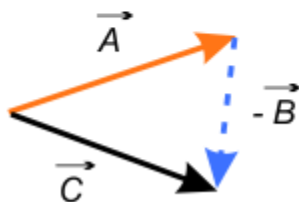
$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

$$-\vec{B} = (-B_x, -B_y)$$



Krok 2



Krok 3

$$\begin{aligned}\vec{A} + (-\vec{B}) &= (A_x + (-B_x), A_y + (-B_y)) \\ &= (A_x - B_x, A_y - B_y)\end{aligned}$$

<https://oze.pwr.edu.pl/kursy/fizykacw/content/start/uploads/dow2-2.png>

Działania na wektorach – iloczyn skalarny

$$\vec{A} = (A_x, A_y)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

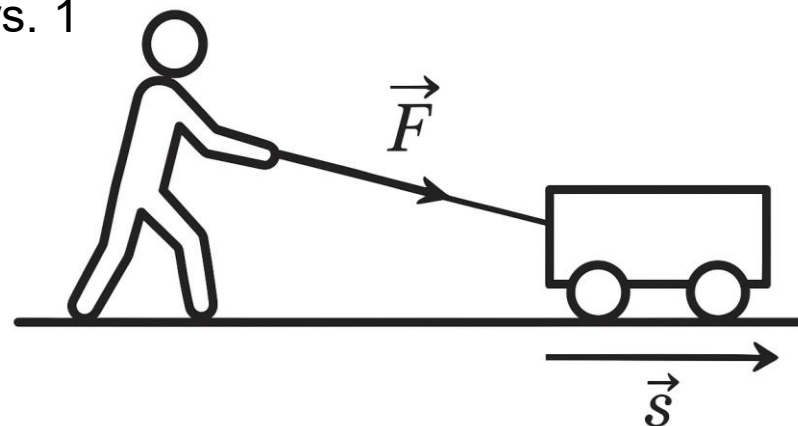
$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x * B_x + A_y * B_y$$

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| * |\vec{B}| * \cos(\angle \vec{A}, \vec{B})$$

W 3D:

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x * B_x + A_y * B_y + A_z * B_z$$

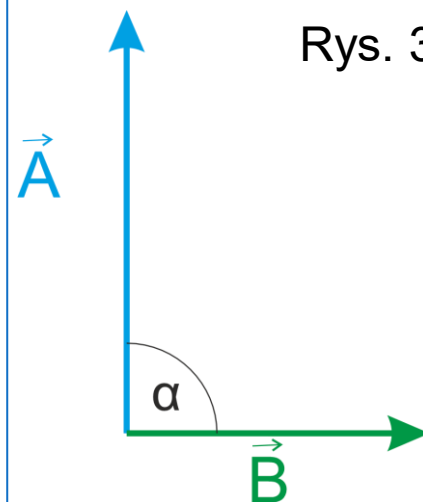
Rys. 1



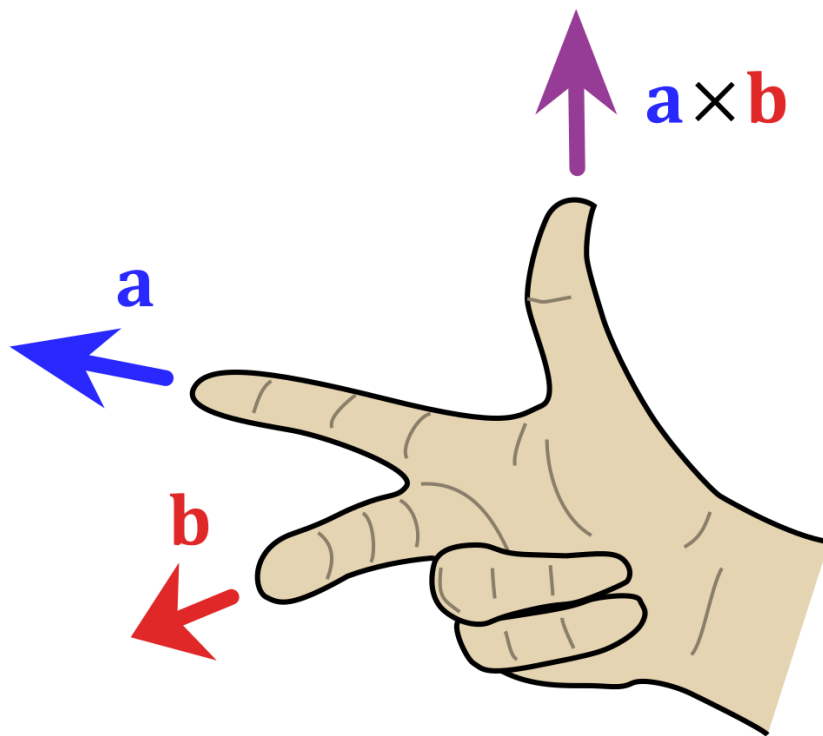
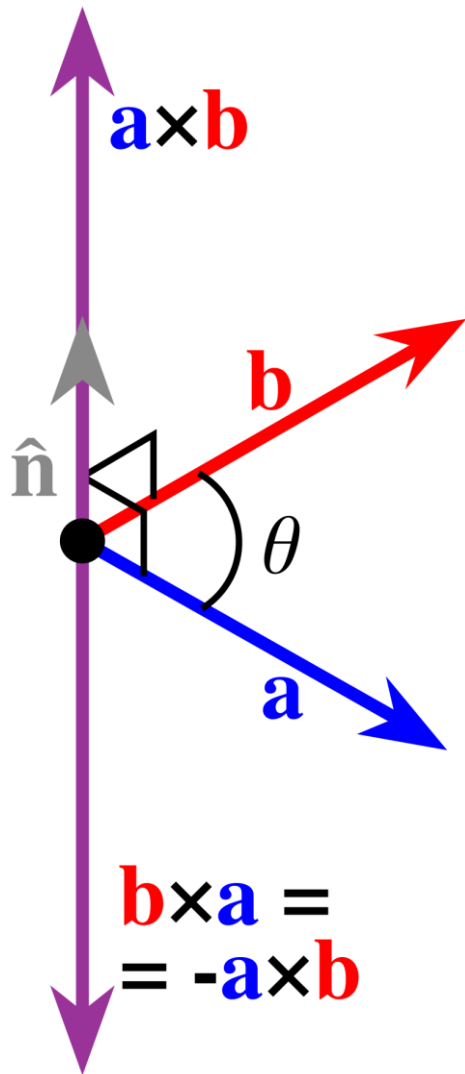
Rys. 2



Rys. 3



Działania na wektorach – iloczyn wektorowy



By Acdx - Self-made, based on Image:Right_hand_cross_product.png, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4436743>

Działania na wektorach – iloczyn wektorowy

W 3D:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{W} = \vec{A} \times \vec{B} =$$

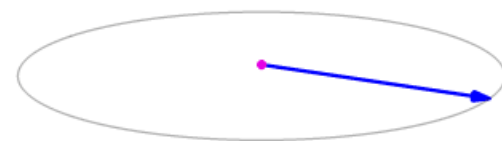
$$= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\vec{W} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}A_y B_z + \hat{j}A_z B_x + \hat{k}A_x B_y - \hat{i}A_z B_y - \hat{j}A_x B_z - \hat{k}A_y B_x =$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$|\vec{W}| = |\vec{A}| * |\vec{B}| * \sin(\angle \vec{A}, \vec{B})$$



By Lucas Vieira - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31185911>

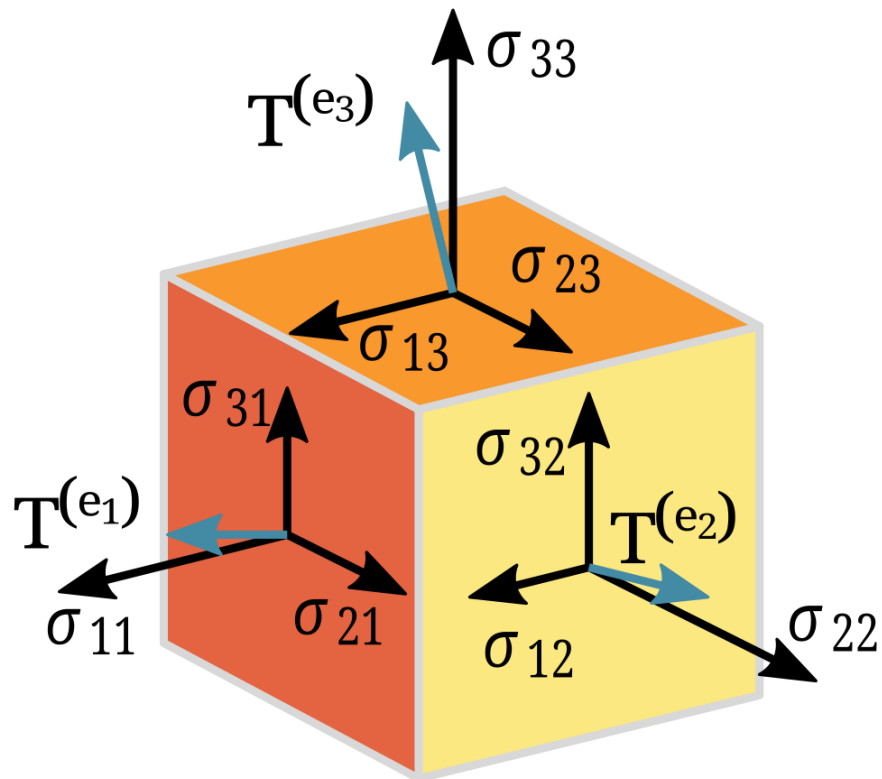
Tensor

Uogólnienie wektora i skalaru.

Tensor rzędu:

- 0 – skalar
- 1 – wektor
- 2 - macierz

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

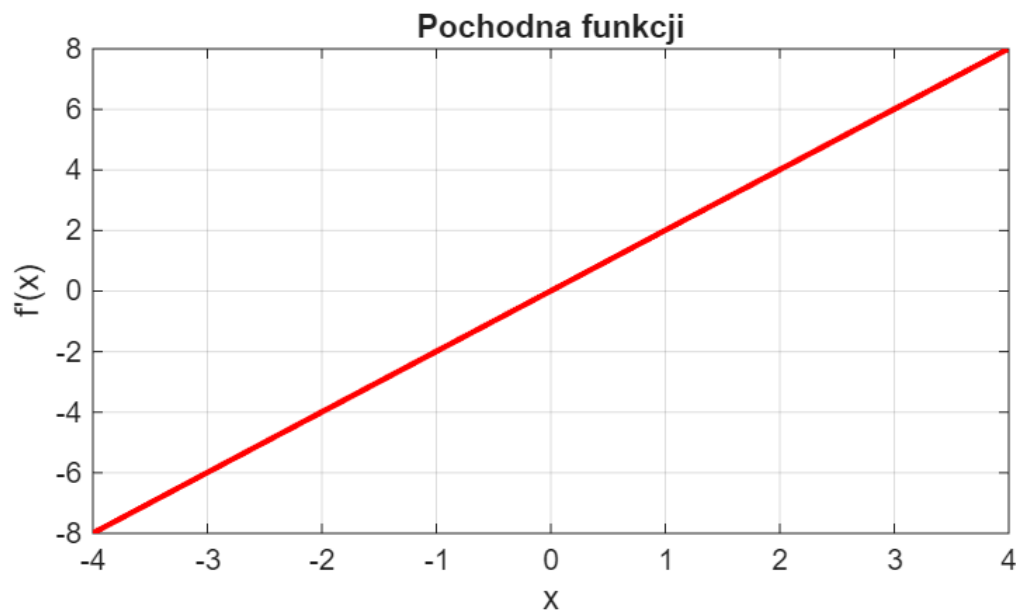
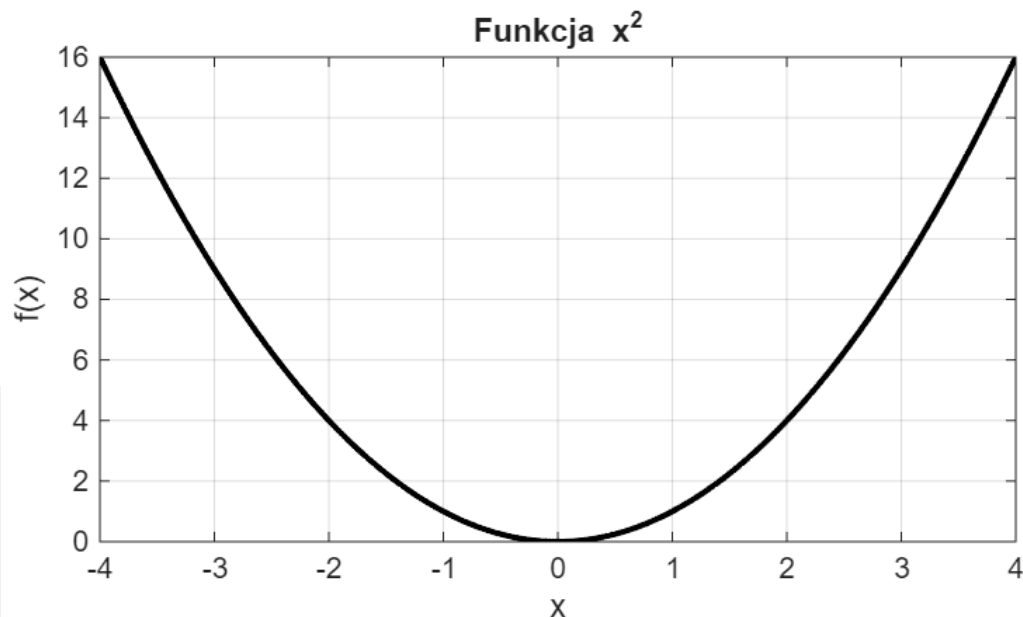


By Components stress tensor cartesian.svg: Sanpaz / derivative work: TimothyRias - Own work based on: Components stress tensor cartesian.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14729540>

Pochodna

Miara tempa zmian funkcji.
Chwilowa szybkość zmian, czyli
stosunek chwilowej zmiany
wartości funkcji do zmiany jej
argumentu.

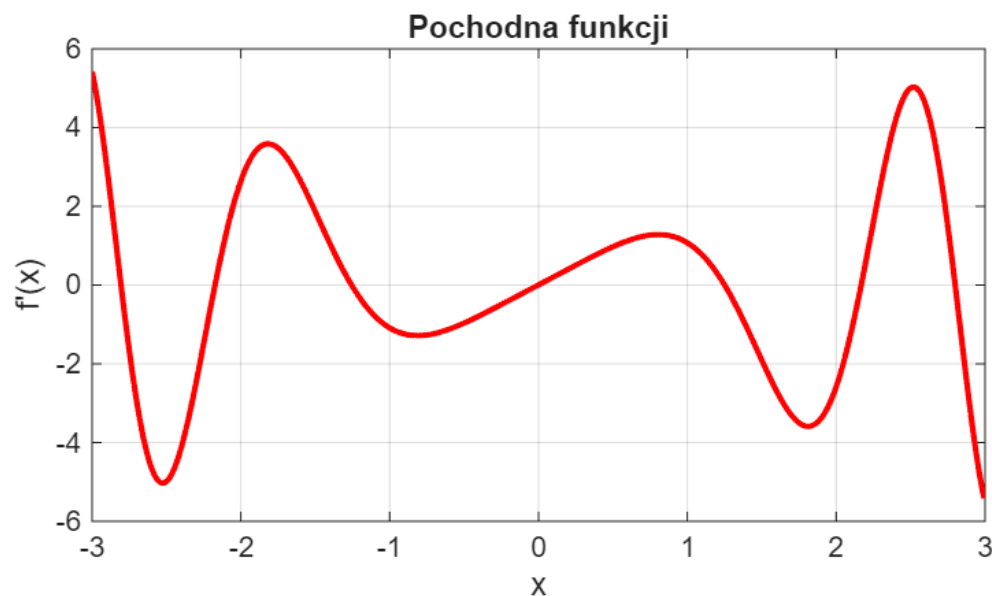
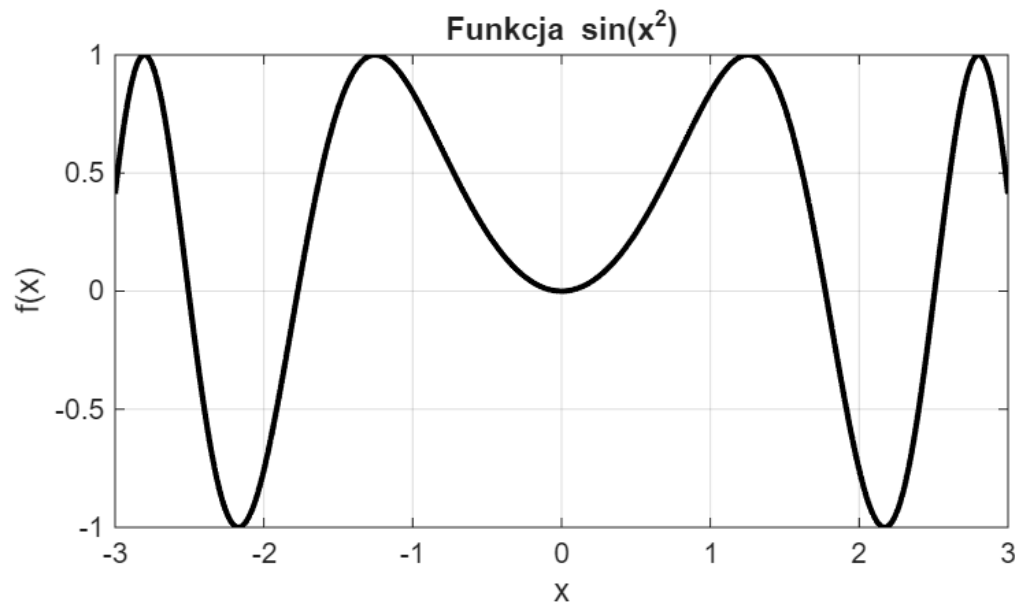
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Pochodna

Miara tempa zmian funkcji.
Chwilowa szybkość zmian, czyli
stosunek chwilowej zmiany
wartości funkcji do zmiany jej
argumentu.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Pochodna z definicji

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

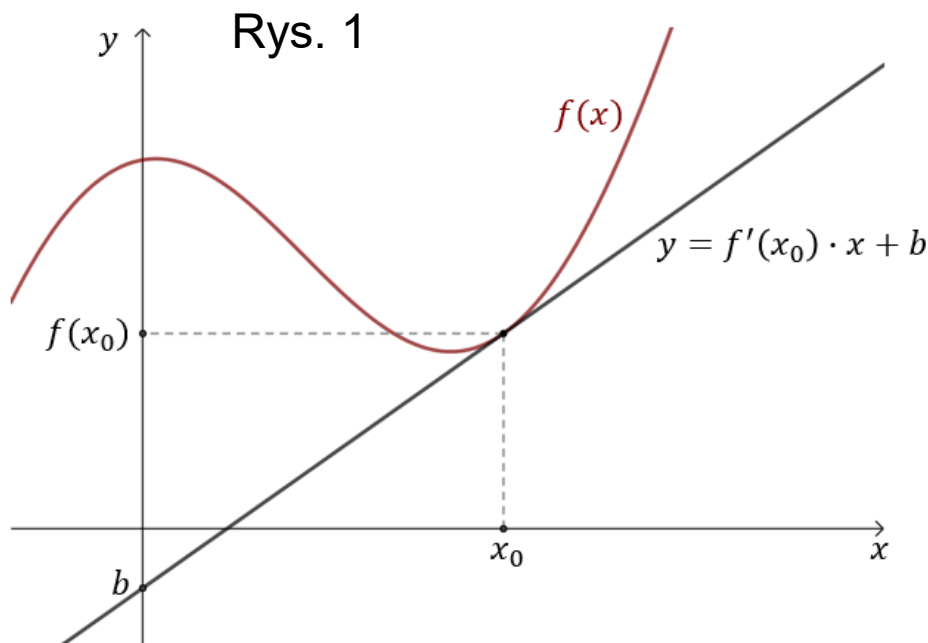
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

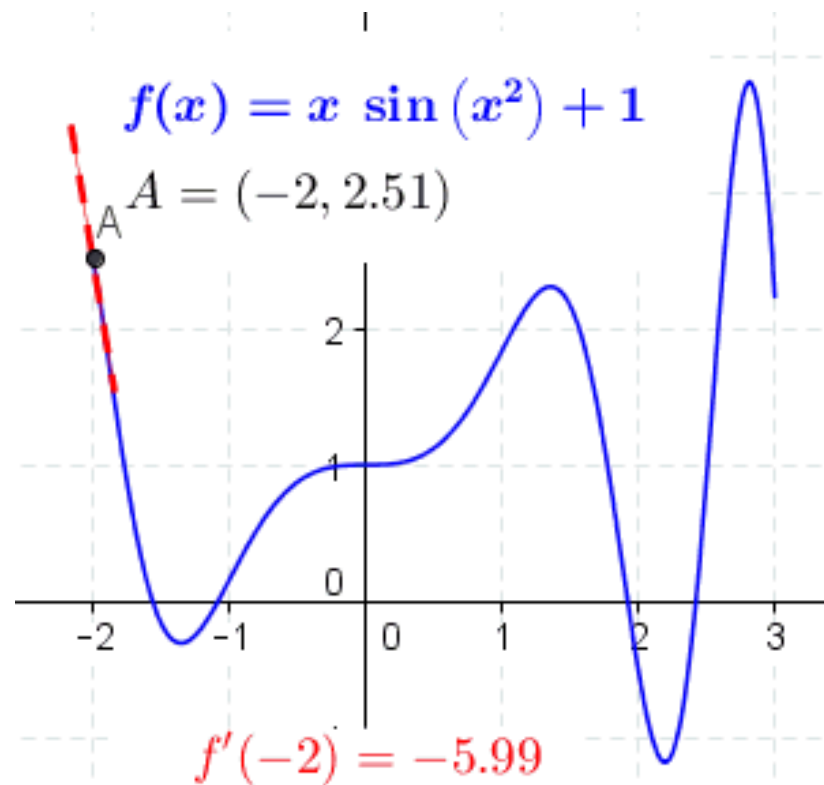
$$f'(x) = 2x$$

Pochodna - styczna

Pochodna funkcji w danym punkcie to nachylenie stycznej do wykresu tej funkcji w tym punkcie.



Rys. 2



By en:User:Dino, User:Lfahlberg - English Wikipedia, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27661406>

Pochodna – najprostsze funkcje

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Dygresja – liczba Eulera

$$e \approx 2,718$$

Stała matematyczna,
definiowana na wiele sposobów:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

W fizyce najczęściej
wykorzystywana do opisów
zaników i rozpadów:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$$

Pochodna funkcji złożonej

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$h(x) = \sin(x^2)$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$$

$$h'(x) = \cos(x^2) * 2x$$

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Pochodna iloczynu funkcji

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$h(x) = x^2 * \sin x$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$$

$$h'(x) = 2x * \sin x + x^2 * \cos x$$

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Pochodna w fizyce

Zapis:

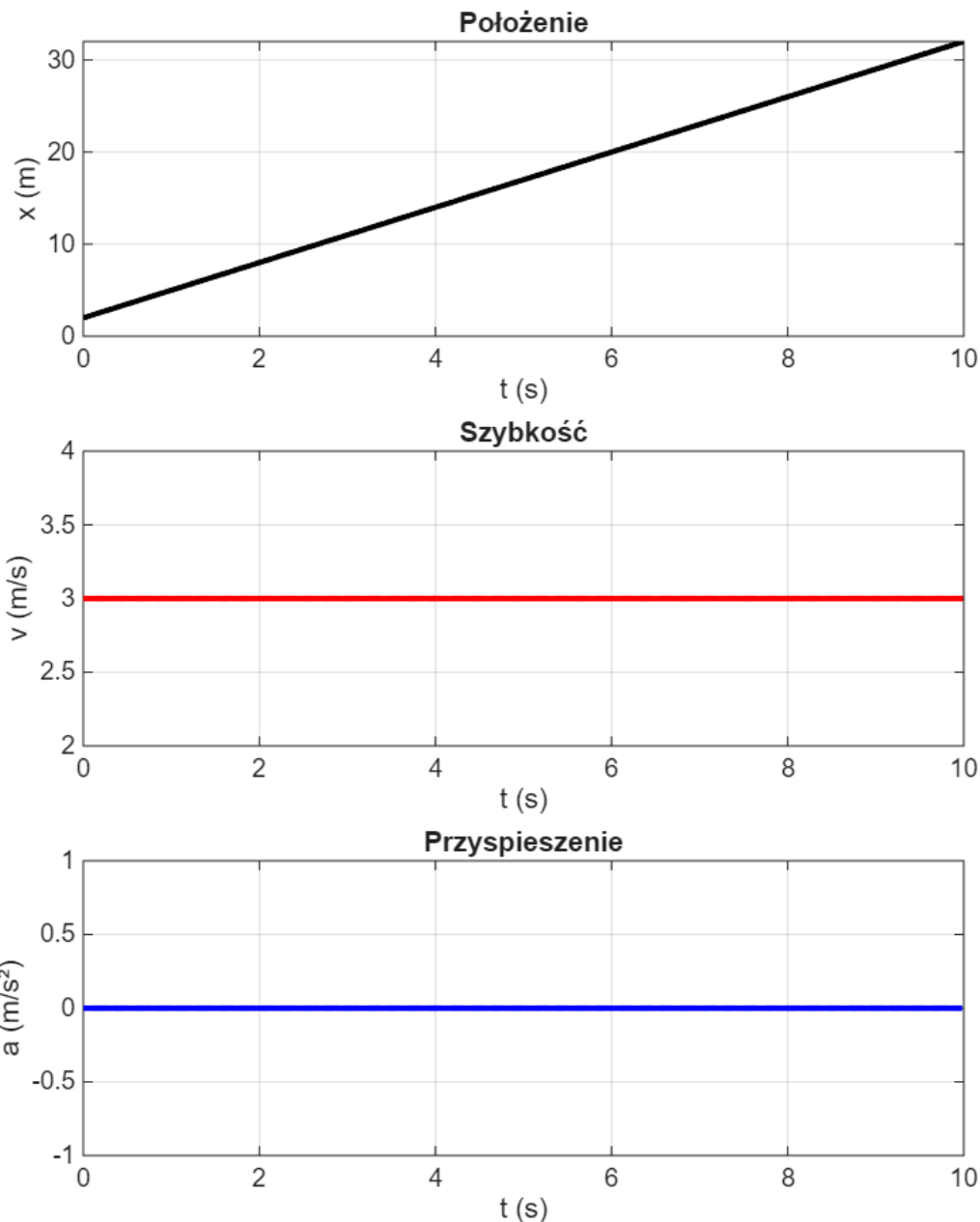
$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Ruch jednostajny:

$$x(t) = vt + x_0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(vt + x_0)}{dt} = v = \text{const.}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$$



Całka

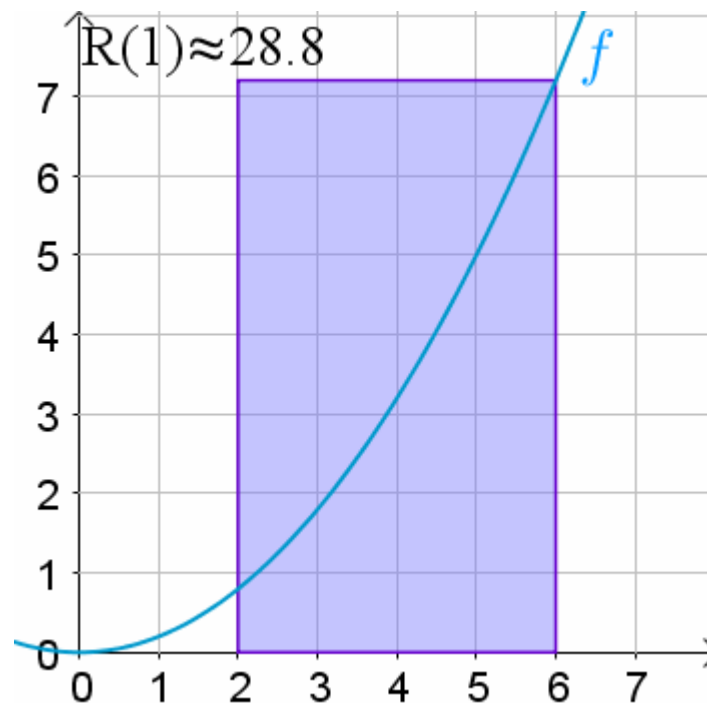
Działanie odwrotne do pochodnej. Akumulacja zmian – suma nieskończenie małych elementów, sumowanie nieskończenie małych przyrostów.

Całka nieoznaczona:

$$\int dx = x$$

Całka oznaczona:

$$\int_0^1 dx = 1$$



Całka nieoznaczona

Funkcja pierwotna $f(x)$ jest poszukiwaną funkcją w działaniu całkowania. Znając pochodną tej funkcji, możemy ją wyznaczyć.

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

$$f(x) = x^2 + 3 \quad f(x) = x^2 + 6 \quad f(x) = x^2 + 28 \quad f(x) = x^2 + 0,01324$$

Uwaga! Funkcja pierwotna nie jest funkcją jednoznaczną

Całka nieoznaczona

Aby obliczyć funkcję pierwotną potrzebujemy dodatkowych informacji, tzw. warunki brzegowe.

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

Warunek początkowy:

$$f(1) = 4$$

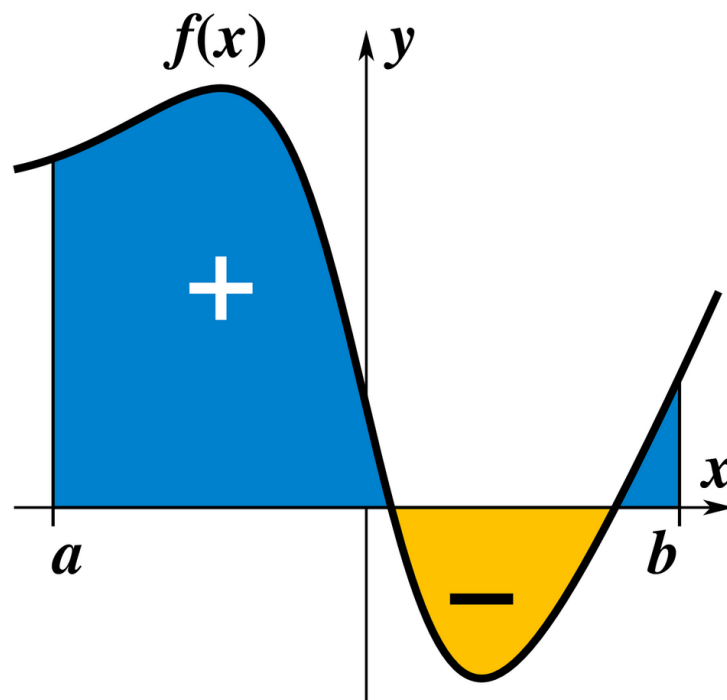
$$4 = 1^2 + C \Rightarrow C = 3$$

$$f(x) = x^2 + 3$$

Całka oznaczona

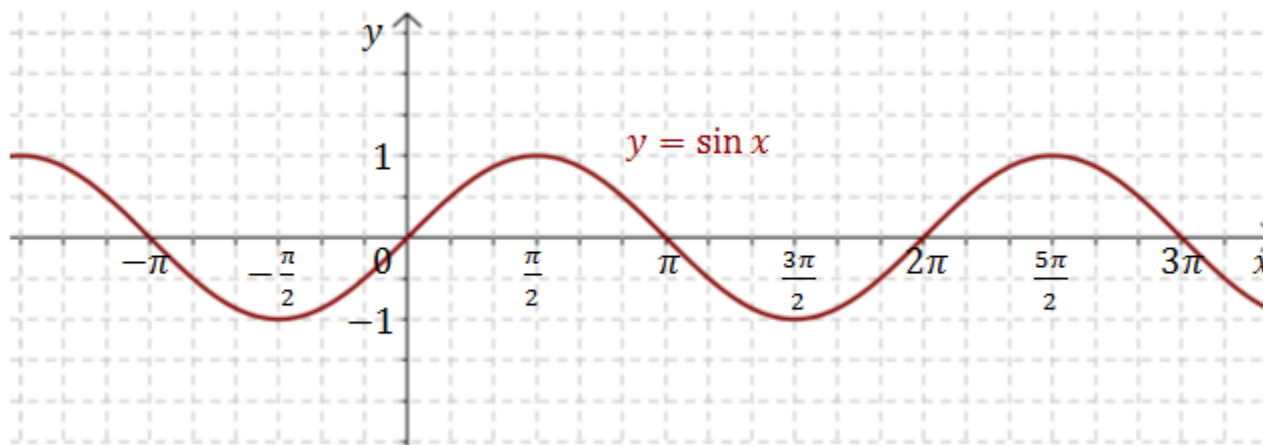
Pole powierzchni pod wykresem danej funkcji w danym przedziale.

$$\int_0^2 2x \, dx = x^2 \Big|_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4$$



Całka oznaczona

<https://www.matemaks.pl/wykres-funkcji-sinus.html>



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

Całka – najprostsze funkcje

$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$const.$
1	$x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Rachunek różniczkowy w fizyce

Szybkość chwilowa:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Przyspieszenie chwilowe:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dygresja – prędkość, szybkość, średnia, chwilowa

$\vec{v}$ – prędkość

$|\vec{v}| = v$ – szybkość

$$v_{\text{sr}} = \frac{\text{całkowita droga}}{\text{całkowity czas}} = \frac{s}{t}$$

$$v_{ch} = \frac{dx}{dt}$$

Rachunek różniczkowy w fizyce

Szybkość chwilowa:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Przyspieszenie chwilowe:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x(t) = 2t + 5$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 5) = 2$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2) = 0$$

Wnioski:

- Ruch jednostajny ($v = \text{const.}$ oraz $a = 0$)
- Ruch prostoliniowy (tylko w 1D, tylko x)

Rachunek różniczkowy w fizyce

Szybkość chwilowa:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Przyspieszenie chwilowe:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x(t) = 2t^2 + 3t + 1$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 + 3t + 1) = 4t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(4t + 3) = 4$$

Wnioski:

- Ruch jednostajnie przyspieszony ($a = \text{const.}$)
 - Ruch prostoliniowy (tylko w 1D, tylko x)

Rachunek różniczkowy w fizyce

$$x(t) = 2t^2 + 3t + 1$$

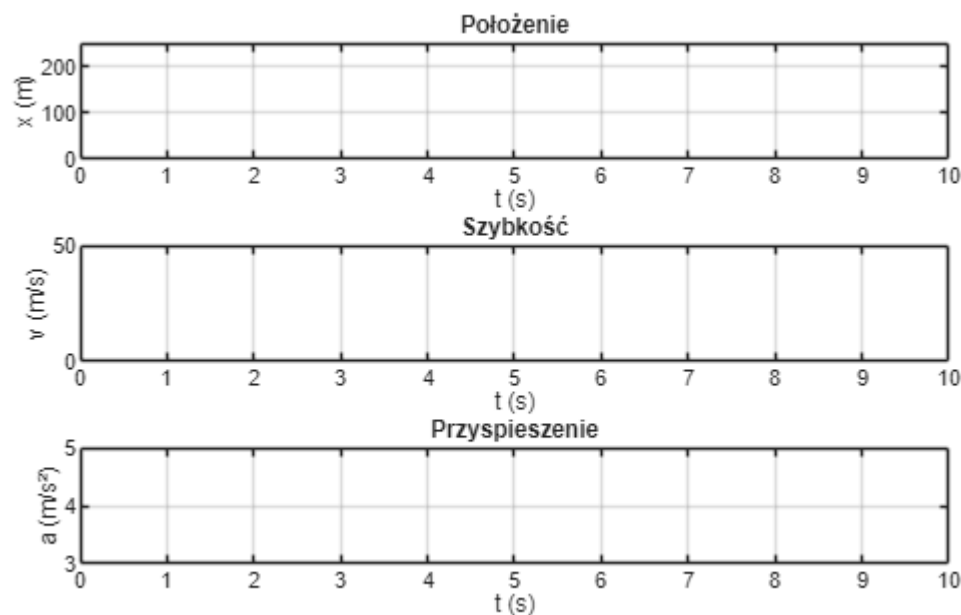
$$v(t) = 4t + 3 \quad a(t) = 4$$

Szybkość chwilowa po 10 s:

$$v(10) = 4 * 10 + 3 = 43$$

Szybkość średnia po 10 s:

$$v_{\text{śr}}(10) = \frac{43 + 0}{2} = 21,5$$



Rachunek różniczkowy w fizyce

$$x(t) = 2t^2 + 3t + 1$$

$$v(t) = 4t + 3$$

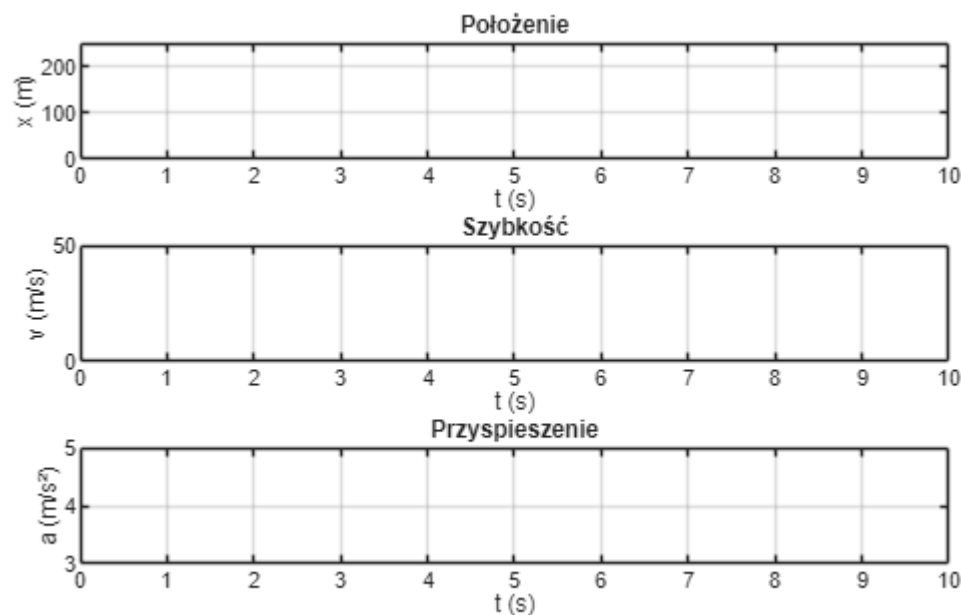
$$a(t) = 4$$

Warunki początkowe (dla $t = 0$):

$$x(0) = 2 * 0^2 + 3 * 0 + 1 = 1$$

$$v(0) = 4 * 0 + 3 = 3$$

$$a(0) = 4$$



Rachunek różniczkowy w fizyce

Warunki początkowe: $x(0) = 1$ $v(0) = 3$ $a(0) = 4 = \text{const.}$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad a dt = dv \quad \int dv = \int a dt \quad v = \int a dt$$

$$v = \int 4 dt = 4t + C \quad 4 * 0 + C = 3 \Rightarrow C = 3 \quad v = 4t + 3$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad v dt = dx \quad \int dx = \int v dt \quad x = \int v dt$$

$$x = \int (4t + 3) dt = \int 4t dt + \int 3 dt = 2t^2 + 3t + C = 2t^2 + 3t + 1$$

Rzut pionowy i spadek swobodny

Przyspieszenie ziemskie we Wrocławiu*:

$$g = (9,8120 \pm 0,0005) \frac{m}{s^2}$$

*wg Dziennika Normalizacji i Miar nr 13, 1981

Siła ciężkości:

$$F = mg$$

$$a = -g$$

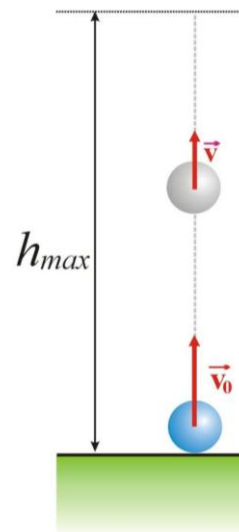
$$v = \int -g dt = -gt + v_0$$

$$y = \int (-gt + v_0) dt = \\ = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

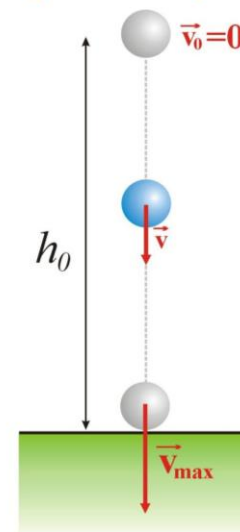
$$h_{max} = y(t_{max}) \\ v(t_{max}) = 0$$

$$v_{max} = v(t_{min}) \\ y(t_{min}) = 0$$

rzut pionowy



spadek swobodny



Rzut pionowy i spadek swobodny

Przyspieszenie ziemskie we Wrocławiu*:

$$g = (9,8120 \pm 0,0005) \frac{m}{s^2}$$

*wg Dziennika Normalizacji i Miar nr 13, 1981

Siła ciężkości:

$$F = mg$$

$$a = -g$$

$$v = \int -g dt = -gt + v_0$$

$$y = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

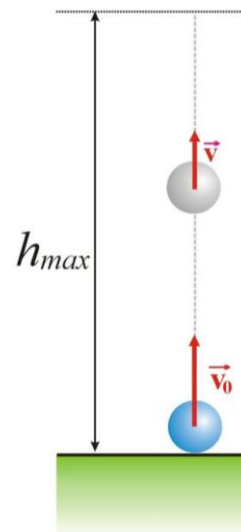
$$t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} + y_0$$

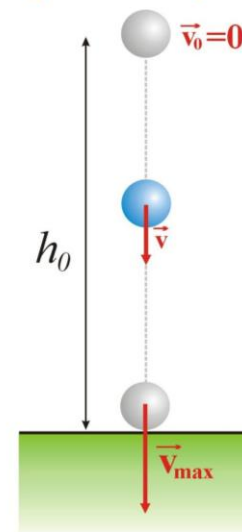
$$t_{min} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

$$v_{max} = -\sqrt{2y_0g}$$

rzut pionowy



spadek swobodny





FIZYKA Z ELEMENTAMI FIZYKI RADIACYJNEJ I | WYKŁAD 2

Dziękuję za uwagę!

dr inż. Katarzyna Gwóźdź